Matrizenrechnung in der Schule

Günter HANISCH, Uni. Wien

1 Einleitung

Matrizen sind eine intelligente Darstellungsart, die weit über das Darstellen von Tabellen hinausgeht. Trotzdem fristen sie in der Schule nur ein stiefmütterliches Dasein, obwohl sie sich hervorragend dafür eignen, komplexe Zusammenhänge einfach zu beschreiben. Der größere Rechenaufwand, den sie im Vergleich zu anderen Aufgaben aus der linearen Algebra benötigen, kann man (und so geschieht es auch in der Praxis) einem Computer übertragen, da sowohl Excel als auch Derive über alle notwendigen Matrizenbefehle verfügen. Auch die Herleitung der inversen Matrix (samt Gauss-Jordan-Verfahren) bereitet – wie gezeigt werden wird – keine große Schwierigkeit. Und schließlich sind Kenntnisse der MathematiklehrerInnen Dank ihres Universitätsstudiums auf diesem Gebiet weit über das Notwendige vorhanden.

Da Matrizen vor Allem in der Wirtschaftsmathematik eine große Bedeutung haben, ist auch entsprechendes Aufgabenmaterial vorhanden. Und dieses könnte für viele SchülerInnen ansprechender sein als die physikalisch-technischen Anwendungen, die in der Analysis zum Tragen kommen.

2 Tragfähiges und motivierendes Einführen von Matrizen

Will man Matrizen nicht vom Himmel fallen lassen (Eine Matrix ist ...), ist es sinnvoll mit einer inner- oder außermathematischen Anwendung zu beginnen. Dafür bieten sich folgende Möglichkeiten an, wofür man in den üblichen Lehrbüchern (siehe Literaturverzeichnis) auch entsprechende Aufgaben finden kann:

1. Lineare Abbildungen:		+	anschaulich
		–	nur für quadratische Matrizen
2. Graph:			
	Soziogramm:	+	spricht auch Mädchen an
		–	Boolsche Algebra
	Stabdiagramm	+	tragfähig, da auch Matrizenmultiplikation
		–	hohes technisches Vorwissen notwendig
3. Gleichungssysteme		+	Erkennen der linearen Beziehung
		–	wenig motivierend
4. Übergangsmatrix		+	viele Anwendungen
		–	nur quadratische Matrizen
5. Ökonomie			
	Qualitätsmatrix:	+	sinnvolle Anwendung
		–	nicht tragfähig
	Input-Outputanalyse:	+	interessante Anwendung
		–	zu komplex
	Bedarfs- bzw. Verbrauchsmatrix:	+	motivierend und tragfähig
		–	

Gerade die Bedarfs- bzw. Verbrauchsmatrix bietet sich deswegen zur Einführung an, da sie sowohl motivierend als auch tragfähig ist (siehe nachfolgendes Einführungsbeispiel):

Bsp.: Eine Fabrik stellt zwei Sorten Ostereier aus Schokolade her und zwar Vollmilcheier und Zartbittereier. Dafür benötigt sie pro Ei folgende Mengen an Vollmilchschokolade, Zartbitterschokolade und Nougatcreme:

Halbfertigprodukte (in g)	Vollmilcheier (Stück)	Zartbittereier (Stück)
Vollmilchschokolade	50	0
Zartbitterschokolade	0	50
Nougatcreme	40	40

An diesem Beispiel lassen sich nämlich folgende Probleme behandeln, die auf die daneben angegebenen Matrizenoperationen führen (siehe die folgenden Ausführungen):

1. Wann sind zwei Produktionsmatrizen gleich? $\Longrightarrow$ Gleichheit von Matrizen
2. Unterschied zweier Produktionsmatrizen $\Longrightarrow$ Differenz bzw. Summe von Matrizen
3. Herstellen von größeren Eiern? $\Longrightarrow$ Multiplikation mit einem Skalar
4. Wie viel g Halbfertigprodukte pro Ei? $\Longrightarrow$ Multiplikation mit einem Vektor
5. Wie viel g Rohstoffe pro Ei? $\Longrightarrow$ Multiplikation von Matrizen

Betrachtet man obige Tabelle ohne Kopfzeile und linke Randspalte, lässt sich leicht definieren:

Matrizen dienen als „Kurzschreibweise" von **Tabellen** zur übersichtlichen Darstellung von Informationen:

Ein aus m Zeilen und n Spalten bestehendes *rechteckiges (Zahlen-)Schema*

$$\begin{array}{cl} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{1-te Zeile} \\ \\ \\ \\ i\text{-te Zeile} \\ \\ m\text{-te Zeile} \end{array} \\ \text{1-te Spalte} \qquad\qquad j\text{-te Spalte} \qquad n\text{-te Spalte} & \end{array}$$

heißt **Matrix vom Typ $(m; n)$** oder **$m \times n$ - Matrix** (sprich: m kreuz n Matrix).

Man schreibt: $$A = (a_{ij}) \quad \begin{cases} i = 1 \dots m & \text{„Zeilenindex"} \\ j = 1 \dots n & \text{„Spaltenindex"} \end{cases}$$

Der Platz eines Elements in einer Matrix wird ersichtlich durch ein **geordnetes Paar von Indizes** - kurz einen **Doppelindex**– angegeben. Der erste Index gibt die Nummer der **Zeile**, der zweite Index die Nummer der **Spalte** an, in der das Element steht. Somit bezeichnet a_{21} das Element im Kreuzungspunkt der 2. Zeile und 1. Spalte, a_{43} (sprich a-vier-drei) das Element im Kreuzungspunkt der 4. Zeile und 3. Spalte, a_{ij} das Element im Kreuzungspunkt der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

Bemerkung:

1. Die Reihenfolge der Indizes merkt man sich leicht mittels der **Indexregel**: Zeilenindex zuerst, Spaltenindex später!
2. Besteht eine Matrix nur aus einer Zeile oder einer Spalte, nennt man sie **Vektor**, wobei man zwischen einem Zeilenvektor und einem Spaltenvektor unterscheidet.
3. Eine Matrix, bei der die Anzahl der Zeilen gleich der Anzahl der Spalten ist, heißt **Quadratische Matrix**.
4. Besitzt die Matrix mehr als 10 Spalten oder 10 Zeilen, so muss man zwischen den Indizes **Beistriche** setzen, da man sonst nicht entscheiden kann, ob a_{111} das Element im Kreuzungspunkt der 1. Zeile mit der 11. Spalte, oder das Element im Kreuzungspunkt der 11. Zeile mit der 1. Spalte meint!
5. Beachte weiters den Unterschied zwischen a_{ij} und (a_{ij}); ersteres bezeichnet ein **Element** der Matrix, das zweite die **ganze Matrix**.

3 Gleichheit, Differenz und Addition von Matrizen

Bevor man sich fragt, wann zwei Verbrauchsmatrizen gleich sind, ist es didaktisch sinnvoller, zu untersuchen, inwiefern sie sich unterscheiden.

Bsp.: Die Konkurrenz stellt ebenfalls diese zwei Sorten Ostereier aus Schokolade her und benötigt dafür pro Ei folgende Mengen an Vollmilchschokolade, Zartbitterschokolade und Nougatcreme:

Halbfertigprodukte (in g)	Vollmilcheier (Stück)	Zartbittereier (Stück)
Vollmilchschokolade	50	0
Zartbitterschokolade	0	50
Nougatcreme	35	35

Worin unterscheiden sich die Produkte voneinander?

Lösung: Offenbar durch die Menge an Nougatcreme! Die beiden Bedarfsmatrizen sind offenbar nicht gleich!

Es ist daher sinnvoll zu definieren:

Stimmen Matrizen in ihrem Typ und in entsprechenden (= gleich platzierten) Elementen überein, so nennt man sie gleich, und schreibt: $A = B$.

Möchte man den Unterschied deutlich machen, so wird man die Differenz bilden:

Halbfertigprodukte (in g)	Vollmilcheier (Stück)	Zartbittereier (Stück)
Vollmilchschokolade	0	0
Zartbitterschokolade	0	0
Nougatcreme	5	5

Oder in mathematischer Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \\ 40 & 40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \\ 35 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Obiges Beispiel können wir verallgemeinern und definieren daher:

Es seien A und B Matrizen vom **selben** Typ $(m; n)$:

1. Unter der Summe $A + B$ versteht man jene Matrix C vom Typ $(m; n)$, deren Elemente die Summe gleich platzierter Elemente von A und B sind:

$$C = A + B =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Unter der Differenz $A - B$ versteht man jene Matrix C vom Typ $(m; n)$, deren Elemente die Differenz gleich platzierter Elemente von A und B sind:

$$C = A - B =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

4 Multiplikation mit einer Zahl

Bsp.: Wollen wir doppelt so schwere Eier herstellen, brauchen wir offenbar die doppelten Mengen:

Halbfertigprodukte (in g)	Vollmilcheier (Stück)	Zartbittereier (Stück)
Vollmilchschokolade	100	0
Zartbitterschokolade	0	100
Nougatcreme	80	80

Mathematisch schreiben wir das so an:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \\ 40 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \\ 80 & 80 \end{pmatrix}$$

und wir definieren:

Sei A eine Matrix und $v \in \Re$:
Unter dem Produkt der Matrix A mit dem Skalar v versteht man jene Matrix C, deren Elemente das v-fache der gleich platzierten Elemente von A sind:

$$C = v \cdot A = v \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cdot a_{11} & \dots & v \cdot a_{1n} \\ v \cdot a_{21} & \dots & v \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ v \cdot a_{m1} & \dots & v \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

1. Analog zu $v \cdot A$ lässt sich $A \cdot v$ definieren. Dann gilt: $v \cdot A = A \cdot v$. Begründe!
2. Statt $(-1) \cdot A$ schreibt man einfach $-A$.
3. Das Ergebnis der Multiplikation mit Null ist eine Matrix, die lauter Nullen enthält, die Nullmatrix O: $0 \cdot A = O$

Man kann nun leicht folgende Rechenregeln von den SchülerInnen beweisen lassen:

Es seien A, B und C Matrizen vom gleichen Typ, v und w Skalare aus $\Re$. Dann gilt:

1. $A + B = B + A$

2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + O = A$
4. $A + (-A) = O$
5. $1 \cdot A = A$
6. $0 \cdot A = O$
7. $v \cdot (w \cdot A) = (v \cdot w) \cdot A$
8. $v \cdot (A \pm B) = v \cdot A \pm v \cdot B$
9. $(v \pm w) \cdot A = v \cdot A \pm w \cdot A$

Man sieht: Die Nullmatrix O spielt bei der Matrizenaddition und Matrizensubtraktion die gleiche Rolle wie die Null bei der Addition und bei der Subtraktion; sie ist das **neutrale Element** der Matrizenaddition.

5 Multiplikation mit einem Vektor

Bsp.: Die Fabrik soll 10 000 Vollmilcheier und 20 000 Zartbittereier herstellen. Berechne, welche Menge an Halbfertigprodukten dafür verwendet werden muss!

Lösung: Offenbar erhalten wir die Menge an Vollmilchschokolade, wenn wir die Anzahl der Vollmilcheier mit 40 multiplizieren, da man pro Vollmilchei 40 g Vollmilchschokolade benötigt, Analoges gilt für die Menge an Zartbitterschokolade. Für die Menge an Nougatcreme müssen wir zusätzlich die Mengen, die für die Vollmilcheier und für die Zartbittereier verwendet werden, addieren.

	Masse (in g)
Vollmilchschokolade	$50 \cdot 10\,000 + 0 \cdot 20\,000 = 500\,000$
Zartbitterschokolade	$0 \cdot 10\,000 + 50 \cdot 20\,000 = 1\,000\,000$
Nougatcreme	$40 \cdot 10\,000 + 40 \cdot 20\,000 = 1\,200\,000$

Mathematisch schreiben wir das so an:

$$\begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \\ 40 & 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10\,000 \\ 20\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \cdot 10\,000 + 0 \cdot 20\,000 \\ 0 \cdot 10\,000 + 50 \cdot 20\,000 \\ 40 \cdot 10\,000 + 40 \cdot 20\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500\,000 \\ 1\,000\,000 \\ 1\,200\,000 \end{pmatrix}$$

Wollen wir die Masse in kg, dividieren wir durch 1000:

$$\frac{1}{1000} \cdot \begin{pmatrix} 500\,000 \\ 1\,000\,000 \\ 1\,200\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 1\,000 \\ 1\,200 \end{pmatrix}$$

und erhalten somit:

Halbfertigprodukte	Masse (in kg)
Vollmilchschokolade	500
Zartbitterschokolade	1000
Nougatcreme	1200

Wir definieren somit die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor:

Sei A eine $m \times n$-Matrix und $\vec{v}$ ein n-zeiliger Spaltenvektor:

Unter dem Produkt des Vektors $\vec{v}$ mit der Matrix A versteht man jenen m-spaltiger Spaltenvektor C, dessen Elemente man – wie folgt – erhält: Man multipliziert jedes Element des Vektors mit dem entsprechenden Elementen von A und bildet die Summe:

$$C = A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot v_1 + a_{12} \cdot v_2 + \ldots + a_{1n} \cdot v_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot v_1 + a_{m2} \cdot v_2 + \ldots + a_{mn} \cdot v_n \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

1. Offensichtlich muss die Spaltenanzahl der Matrix mit der Zeilenzahl des Vektors übereinstimmen, sonst hätte die Multiplikation keinen Sinn.

2. Multipliziert man einen Zeilenvektor mit einem Spaltenvektor, so ist das Ergebnis eine Zahl; eine derartige Verknüpfung nennt man **Skalares Produkt**:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n = c$$

   Die Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektors kann man sich mit folgender Merkregel leicht merken: Zerlege die Matrix in Zeilenvektoren und bilde die Skalaren Produkte. Das Ergebnis fasse wieder zu einem Spaltenvektor zusammen.

3. Analog kann man auch einen Spaltenvektor mit einem Zeilenvektor multiplizieren.

6 Multiplikation zweier Matrizen

Bsp.: Die Fabrik stellt die Vollmilchschokolade, die Zartbitterschokolade und die Nougatcreme aus Zucker, Kakao, Vollmilch und Nüssen her (siehe nachfolgende Tabelle, die angibt, wie viel g Rohstoffe man braucht um 1 g Halbfertigprodukte herzustellen). Berechne, welche Menge man für ein Ei jeweils davon verwendet werden muss!

Rohstoffe (in g)	Vollmilchschokolade	Zartbitterschokolade	Nougatcreme
Zucker	0,4	0,4	0,3
Kakao	0,2	0,5	0,2
Vollmilch	0,4	0,1	0,3
Nüsse	0	0	0,2

Lösung: Berechnen wir zuerst die Zuckermenge, die für ein Vollmilchei benötigt wird: dazu brauchen wir 50 g Vollmilchschokolade und 40 g Nougatcreme. Für 50 g Vollmilchschokolade benötigen wir $0,4 \cdot 50$ g Zucker und für 40 g Nougatcreme $0,3 \cdot 40$ g Zucker, insgesamt also $0,4 \cdot 50 + 0,3 \cdot 40 = 32$ g Zucker. Wir rechnen also so, wie wir dies schon bei der Multiplikation einer Matrix mit einem Vektors getan haben. Mathematisch wird das so angeschrieben:

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \\ 40 & 40 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,4 \cdot 50 + 0,4 \cdot 0 + 0,4 \cdot 40 & 0,4 \cdot 0 + 0,4 \cdot 50 + 0,4 \cdot 40 \\ 0,2 \cdot 50 + 0,5 \cdot 0 + 0,2 \cdot 40 & 0,2 \cdot 0 + 0,5 \cdot 50 + 0,2 \cdot 40 \\ 0,4 \cdot 50 + 0,1 \cdot 0 + 0,3 \cdot 40 & 0,4 \cdot 0 + 0,1 \cdot 50 + 0,3 \cdot 40 \\ 0 \cdot 50 + 0 \cdot 0 + 0,2 \cdot 40 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 50 + 0,2 \cdot 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 32 \\ 18 & 18 \\ 32 & 32 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Fügen wir zur Tabelle wieder die Kopfzeile und die erste Spalte dazu, erhalten wir:

Rohstoffe (in g)	Vollmilcheier	Zartbittereier
Zucker	32	32
Kakao	18	18
Vollmilch	32	32
Nüsse	8	8

Man sieht: Bei der Multiplikation zweier Matrizen handelt es sich um eine wiederholte Skalare Multiplikation. Dabei ist c_{11} das Skalare Produkt des 1-ten Zeilenvektors von A mit dem 1-ten Spaltenvektor von B. Ebenso ist c_{32} das Skalare Produkt des 3-ten Zeilenvektors von A mit dem 2-ten Spaltenvektor von B. Die restlichen Elemente c_{ij} erhält man in analoger Weise durch Skalare Multiplikation des i-ten Zeilenvektors von A mit dem j-ten Spaltenvektor von B:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Wir können somit definieren:
Ist A eine Matrix vom Typ $(m;n)$ und B eine Matrix vom Typ $(n;r)$, so heißt die gemäß

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{11}b_{1r} + \dots + a_{1n}b_{nr} \\ a_{21}b_{11} + \dots + a_{2n}b_{n1} & \dots & a_{21}b_{1r} + \dots + a_{2n}b_{nr} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mn}b_{n1} & \dots & a_{m1}b_{1r} + \dots + a_{mn}b_{nr} \end{pmatrix}$$

erklärte Verknüpfung **Multiplikation einer Matrix mit einer Matrix**. Das Ergebnis ist eine Matrix C vom Typ $(m;r)$, bei der das Element c_{ij} der Matrix C das Skalare Produkt des i-ten Zeilenvektors a_i der Matrix A mit dem j-ten Spaltenvektor b_j der Matrix B ist:
$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$

Bemerkung:

1. Matrizen kann man *genau dann* multiplizieren, wenn die Spaltenzahl der ersten Matrix mit der Zeilenzahl der zweiten Matrix übereinstimmt!
   Merkregel: $(m;n) \cdot (n;r) = (m;r)$

2. Beim händischen Multiplizieren von Matrizen ist das **FALK'sche Schema** hilfreich:
   Wir erläutern es an obigem Beispiel:

$$\begin{array}{c|c|c} & \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \\ 40 & 40 \end{pmatrix} & \\ \hline \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 32 & 32 \\ 18 & 18 \\ 32 & 32 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} & m = 4 \\ n = 3 & r = 2 & \end{array}$$

   Im Schnittpunkt des Zeilenvektors der ersten Matrix und dem Spaltenvektor der zweiten Matrix steht jeweils das Skalare Produkt.

Gibt es für die Matrizenmultiplikation ein **neutrales Element**, d. h. eine Matrix E, deren Produkt mit jeder Matrix A wieder die Matrix A ergibt? Die Antwort sollte von den SchülerInnen kommen, da man sich leicht überlegen kann, wie eine solche Matrix aussehen muss, nämlich eine Matrix, deren Elemente in der **Hauptdiagonale** den Wert „1“ haben, während alle anderen den Wert „0“ haben:

Die quadratische Matrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

vom Typ $(n; n)$ heißt $n \times n$-**Einheitsmatrix.**

Sind $v \in \Re$ und A, B und C Matrizen mit Zeilen- und Spaltenzahlen, welche die Produktbildung erlauben, dann gelten die folgenden **Rechenregeln**, die von den SchülerInnen leicht bewiesen werden können:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2. $v \cdot (A \cdot B) = (v \cdot A) \cdot B = A \cdot (v \cdot B)$
3. $A \cdot O = O$ und $O \cdot A = O$
4. $A \cdot E = A$ und $E \cdot A = A$
5. $A \cdot (B \pm C) = A \cdot B \pm A \cdot C$

Die Frage, ob das Kommutativgesetz bei der Multiplikation gilt, ist leicht zu beantworten, da beim Vertauschen der beiden Matrizen im Allgemeinen eine Multiplikation nicht möglich sein wird. Interessanter ist jedoch die Frage, ob vielleicht bei quadratischen Matrizen das Kommutativgesetz gilt, was aber durch ein Gegenbeispiel leicht zu verneinen ist. Bei dieser Gelegenheit sollte man darauf hinweisen, dass ja auch beim Potenzieren von Zahlen im Allgemeinen $a^b \neq b^a$ ist.

7 Inverse Matrix

Das für die Matrizenmultiplikation neutrale Element ist die Einheitsmatrix. Zur Herleitung der Inversen Matrix müssen wir unser Beispiel verlassen, da ja eine quadratische Matrix vorliegen muss (siehe unten). Es erscheint günstiger statt von einer außermathematischen Anwendung auszugehen, ein innermathematisches Problem zu stellen, nämlich ein Äquivalent zur Division von Zahlen zu finden, wo ja etwa $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ gilt.
Wir suchen also eine Matrix A^{-1}, für die gilt: $A \cdot A^{-1} = E$.
Gibt es so eine Matrix, dann können wir obige Gleichung mit A multiplizieren und erhalten

$$(A \cdot A^{-1}) \cdot A = E \cdot A$$

Wegen Rechenregel (1) und (4) können wir umformen:

$$A \cdot (A^{-1} \cdot A) = E \cdot A$$

Somit gilt dann auch

$$A^{-1} \cdot A = E,$$

was aber heißt, dass – damit die Multiplikation überhaupt durchgeführt werden kann – A eine quadratische Matrix sein muss!

Wir definieren also:
Gibt es zur quadratischen Matrix A eine Matrix A^{-1}, für die gilt:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

so heißt A^{-1} **Inverse Matrix** oder **Kehrmatrix** von A.

Wie berechnet man nun die Inverse einer Matrix?

Dies lässt sich am Besten an einem Beispiel für eine dreireihige quadratische Matrix zeigen:

Bsp.: Invertiere die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 8 & -6 \\ 3 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

Lösung: Sei die gesuchte Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Da $A \cdot A^{-1} = E$ sein muss, multiplizieren wir und verwenden dafür das FALK'sche Schema:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 8 & -6 \\ 3 & -5 & 15 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Für die Elemente der ersten Spalte erhalten wir folgende drei Gleichungen:

$$\begin{array}{rcrcrcl|l|l} 1 \cdot a_{11} & - & 3 \cdot a_{21} & + & 4 \cdot a_{31} & = & 1 & \cdot 2 \;\;]+ & \cdot(-3) \;\;]+ \\ -2 \cdot a_{11} & + & 8 \cdot a_{21} & + & 6 \cdot a_{31} & = & 0 & & \\ 3 \cdot a_{11} & - & 5 \cdot a_{21} & + & 15 \cdot a_{31} & = & 0 & & \end{array}$$

Zum Lösen dieses Gleichungssystems verwenden wir die Methode der gleichen Koeffizienten und multiplizieren zuerst die erste Gleichung mit 2 und addieren sie zur zweiten und weiters multiplizieren wir die erste Gleichung mit (-3) und addieren sie zur dritten.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1\cdot a_{11} & - & 3\cdot a_{21} & + & 4\cdot a_{31} & = & 1 \\ 0\cdot a_{11} & + & 2\cdot a_{21} & + & 2\cdot a_{31} & = & 2 \\ 0\cdot a_{11} & + & 4\cdot a_{21} & + & 3\cdot a_{31} & = & -3 \end{array}$$

Wir kürzen die zweite Gleichung durch 2:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1\cdot a_{11} & - & 3\cdot a_{21} & + & 4\cdot a_{31} & = & 1 \\ 0\cdot a_{11} & + & 1\cdot a_{21} & + & 1\cdot a_{31} & = & 1 \\ 0\cdot a_{11} & + & 4\cdot a_{21} & + & 3\cdot a_{31} & = & -3 \end{array}$$

Nun multiplizieren wir die zweite Gleichung mit 3 und addieren sie zur ersten und weiters multiplizieren wir die zweite Gleichung mit (-4) und addieren sie zur dritten.

$$\begin{array}{rcrcrcr|l|l} 1\cdot a_{11} & + & 0\cdot a_{21} & + & 7\cdot a_{31} & = & 4 & \quad]+ & \\ 0\cdot a_{11} & + & 1\cdot a_{21} & + & 1\cdot a_{31} & = & 1 & \cdot 3 & \cdot(-4) \\ 0\cdot a_{11} & + & 0\cdot a_{21} & - & 1\cdot a_{31} & = & -7 & & \quad]+ \end{array}$$

Als nächstes addieren wir die dritte Gleichung zur zweiten und weiters multiplizieren wir die dritte Gleichung mit 7 und addieren sie zur ersten. Und schließlich multiplizieren wir die dritte Gleichung mit (-1):

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1\cdot a_{11} & + & 0\cdot a_{21} & + & 0\cdot a_{31} & = & -45 \\ 0\cdot a_{11} & + & 1\cdot a_{21} & + & 0\cdot a_{31} & = & -6 \\ 0\cdot a_{11} & + & 0\cdot a_{21} & + & 1\cdot a_{31} & = & 7 \end{array}$$

Damit haben wir die Elemente der ersten Spalte berechnet.

Für die Elemente der zweiten Spalte von A^{-1} gehen wir genauso vor:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1\cdot a_{12} & - & 3\cdot a_{22} & + & 4\cdot a_{32} & = & 0 \\ -2\cdot a_{12} & + & 8\cdot a_{22} & - & 6\cdot a_{32} & = & 1 \\ 3\cdot a_{12} & - & 5\cdot a_{22} & + & 15\cdot a_{32} & = & 0 \end{array}$$

Wir sehen: Die Koeffizienten der linken Seite sind dieselben wie beim ersten Gleichungssystem. Und genau dasselbe gilt auch für die Elemente der dritten Spalte. Um sich viel Schreibarbeit zu ersparen, löst man daher alle drei Gleichungssysteme auf einmal und schreibt dabei die a_{ij} nicht an. Das dabei erhaltene Schema wird nach GAUSS und JORDAN benannt.

1	−3	4	1	0	0
−2	8	−6	0	1	0
3	−5	15	0	0	1
1	−3	4	1	0	0
0	2	2	2	1	0
0	4	3	−3	0	1
1	−3	4	1	0	0
0	1	1	1	0,5	0
0	4	3	−3	0	1
1	0	7	4	1,5	0
0	1	1	1	0,5	0
0	0	−1	−7	−2	1
1	0	0	−45	−12,5	7
0	1	0	−6	−1,5	1
0	0	1	7	2	−1

Wir erhalten somit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -45 & -12,5 & 7 \\ -6 & -1,5 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

8 Literatur

Bosch Karl: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Einführung. München u. Wien 1994.

Bosch Karl: Übungs- und Arbeitsbuch für Ökonomen. Wien 1993.

Hanisch Günter u.a.: Ist Gleich HAK1. Lehrbuch für Mathematik und angewandte Mathematik. Wien 1999.

Luderer Bernd u. Würker Uwe: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. Stuttgart 1995.

Purkert Walter: Brückenkurs: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Leipzig 1995.

Reichel Christian u.a.: Lehrbuch der Mathematik 6. Wien 1999[4].

Strasser Helmut: Mathematik für Wirtschaft und Management. Wien 1997.

Tysiak Wolfgang: Multiplikation von Produktionsmatrizen und Gozinto-Verfahren. In: MNU 51/4, S. 212-217, 1998.

Wernicke Bernd: Matrizendarstellung in Gleichungssystemen und deren Anwendung. In: Mathematik in der Schule 32/11, S. 601-613, 1994.